



Matematik

Kümeler Konu Anlatımı

Küme Kavramı

İyi tanımlanmış birbirinden farklı nesneler topluluğuna küme denir. Bir kümenin belirtilebilmesi için kümeyi oluşturan nesnelerin herkes tarafından anlaşılması ve belli bir anlam olması gerekir.

- Kümeyi oluşturan nesnelerin her birine kümenin elemanı denir.
- Kümeler $A, B, C, \dots$ gibi büyük harflerle gösterilir.
- Bir x nesnesi bir A kümesine ait ise $x \in A$ biçiminde yazılır.
- Bir y nesnesi bir A kümesine ait değilse $y \notin A$ biçiminde yazılır.
- Bir kümedeki nesnelerin sayısına kümenin eleman sayısı denir ve $s(A)$ ile gösterilir.

Uyarı

Kümelerin elemanlarının yerini değiştirmek, kümeyi değiştirmez. Kümede bir eleman bir defa yazılır.

Örnek:

$B = \{a, b, c, \{a, b\}, \{c\}\}$ kümesinin eleman sayısını bulunuz?

Çözüm:

Örnek:

4'ten küçük doğal sayıların kümesini ortak özelliklerine göre,

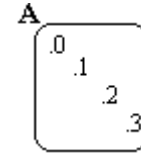
$A = \{x \mid x \text{ 4'ten küçük doğal sayılar} \}$ veya

$A = \{x \mid x < 4, x \in \mathbb{N}\}$ şeklinde yazılabilir.

Bu A kümesi " x lerden oluşur, öyle ki x , 4'ten küçük ve x doğal sayıdır" şeklinde okunur.

3. Venn Şeması İle Gösterim

Kümenin bütün elemanları önlerine birer nokta konularak kapalı bir eğri içine yazılır. Eğri herhangi bir şekilde olabilir; elips, çember, dikdörtgen gibi.



Yandaki venn şemasına göre, A kümesinin eleman sayısı $s(A) = 4$ tür.

Eşit Kümeler

Aynı elemanlardan oluşan kümelere eşit kümeler denir. A kümesi B kümesine eşit ise $A = B$ biçiminde gösterilir.

Örnek:

$A = \{a, b, c\}$ ve $B = \{b, c, a\}$ kümeleri aynı elemanlardan oluştuğu için $A = B$ dir.

Sonlu Küme-Sonsuz Küme

Eleman sayısı bir doğal sayıya eşit olan kümeye sonlu küme denir. Sonlu kümelerin eleman sayısı belirtilebilir.

Eleman sayısı belirtilemeyen kümelere sonsuz küme denir. Sonsuz kümelerin eleman sayısı doğal sayılar ile gösterilemez.

Örnek:

Sınıfınızdaki öğrencilerin kümesi sonlu kümedir.

Bir doğruyu oluşturan noktaların kümesi sonsuz kümedir.

Kümelerin Gösterilişi

1. Liste Yöntemi ile Gösterme

Kümenin elemanları sıra önemli olmaksızın $\{\dots\}$ biçimindeki parantezin içine, aralarına virgül konularak yazılırsa, buna "liste biçiminde gösterme" denir.

2. Ortak Özellik Yöntemi

Kümenin elemanları belli bir özelliği sağlıyorsa, bu özelliğe ortak özellik denir. Küme ortak olan bu özelliklerle gösterilebilir.

Boş Küme

Hiçbir elemanı olmayan kümeye boş küme denir. Boş küme $\{ \}$ veya $\emptyset$ sembolleri ile gösterilir.

Örnek:

$A = \{ x \mid 0 < x < 1, x \in \mathbb{N} \}$ boş kümedir. Çünkü 0 ile 1 arasında doğal sayı yoktur.

Uyarı

$\{ \emptyset \}$ boş küme değildir.

Alt Küme

Bir A kümesinin bütün elemanları bir B kümesinin de elemanı ise A kümesine B kümesinin alt kümesi denir. $A \subset B$ veya $B \supset A$ biçiminde yazılır.

Eğer A kümesi, B kümesinin alt kümesi değilse bu $A \not\subset B$ biçiminde yazılır.

Örnek:

$A = \{1, \{2\}, 3, 4, \{5, 6\}, \{5\}\}$ kümesi veriliyor. Aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

- A. $s(A) = 6$
- B. $\{1\} \in A$
- C. $\{5\} \subset A$
- D. $\{\{5\}\} \in A$
- E. $\{5, 6\} \subset A$

UYARI

- Her küme kendisinin alt kümesidir.
- Boş küme her kümenin alt kümesidir.

Alt Kümeye Ait Özellikler

- $A \subset B$ ve $B \subset A$ ise $A = B$ dir.
- $A \subset B$ ve $B \subset C$ ise $A \subset C$ dir.
- n elemanlı bir kümenin alt küme sayısı 2^n dir.

Örnek:

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesinin alt küme sayısı kaçtır?

Örnek:

Alt küme sayısı 64 olan kümenin eleman sayısını bulunuz.

Örnek:

$A = \{a, b, c, d\}$ kümesinin alt kümelerinin kaçında b harfi eleman olarak bulunur?

Öz Alt Küme

Bir kümenin kendisi hariç diğer bütün alt kümelerine öz alt küme denir.

Örnek:

63 tane öz alt kümesi bulunan bir küme kaç elemanlıdır?

Evrensel Küme

Üzerinde işlem yapılan bütün kümeleri kapsayan en geniş kümeye evrensel küme denir. Evrensel küme E harfi ile gösterilir.

Bir Kümenin Tümlenyeni

Bir A kümesi E evrensel kümesinin alt kümesi olsun. Evrensel kümeye ait olup A kümesine ait olmayan elemanların oluşturduğu kümeye A kümesinin tümlenyeni denir ve A' ile gösterilir.

$$A' = \{x \mid x \in E \text{ ve } x \notin A\}$$

UYARI

$$A \cup A' = E \text{ dir.}$$

Tümlemenin Özellikleri

- $(A')' = A$ dır.
- $E' = \emptyset$
- $\emptyset' = E$
- $A \cap A' = \emptyset$
- $A \subset B$ ise $B' \subset A'$ dır.

KÜMELERDE İŞLEMLER

1. Kesişim İşlemi A ve B iki küme olmak

üzere A ile B nin ortak elemanlarının

oluşturduğu kümeye A ile B kümelerinin

kesişim kümesi denir ve $A \cap B$ şeklinde

gösterilir.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ ve } x \in B\}$$

Örnek:

$A = \{a, b, c, d, e\}$ ve $B = \{a, d\}$ kümeleri veriliyor. $A \cap B$ kümesini liste biçiminde yazıp venn şemasında gösteriniz.

Kesişme İşlemi ile İlgili Özellikler

- a. Değişme özelliği.

$$A \cap B = B \cap A$$

- b. Tek kuvvet özelliği

$$A \cap A = A$$

- c. Birleşme özelliği

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

2. Kümelerde Birleşme İşlemi

A ile B iki küme olmak üzere. Bu iki kümedeki bütün elemanlardan meydana gelen kümeye A ile B nin birleşim kümesi denir ve $A \cup B$ ile gösterilir.

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ veya } x \in B\}$$

Örnek:

$A = \{a, b, c, d, e\}$ ve $B = \{b, c, e, f, g\}$ kümeleri veriliyor.

$A \cup B$ kümesini liste biçiminde yazıp venn şemasında gösteriniz.

Birleşim İşlemi ile İlgili Özellikler

- Değişme özelliği

$$A \cup B = B \cup A$$

- Tek kuvvet özelliği

$$A \cup A = A$$

- Birleşme özelliği

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

- De Morgan Kuralları

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

- Kesişimin birleşim üzerine dağılma özelliği

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

- Birleşimin kesişim üzerine dağılma özelliği

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Örnek:

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$ ve $(A \cup C) = \{1, 3, 5, 6\}$ olduğuna göre $A \cup (B \cap C)$ kümesini bulunuz.

NOT: $s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$ dir.

3. Kümelerde Fark İşlemi

A kümesinde olup B kümesinde olmayan elemanların oluşturduğu kümeye A fark B kümesi denir ve $A - B$ ile gösterilir.

$$A - B = \{x | x \in A \text{ ve } x \notin B\}$$

Örnek:

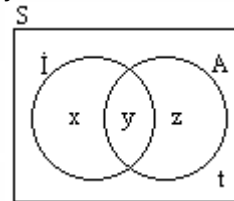
$A = \{a, b, c, d, e\}$ ve $A \cap B = \{a, d\}$ olduğuna göre $A - B$ kümesini bulunuz.

Fark İşlemi ile İlgili Özellikler

- $A \subset B$ ise $A - B = \emptyset$
- $A - B = A \cap B'$
- $s(A \cup B) = s(A - B) + s(B - A) + s(A \cap B)$

NOT:

Küme problemlerinin çözümünde aşağıdaki pratik şema yöntemini kullanabiliriz.



Şemada x, y, z, t bulundukları bölgenin eleman sayılarını göstermektedir. İngilizce bilenlerin kümesi I, Almanca bilenlerin kümesi A ve sınıftaki bütün öğrencilerin kümesi S olsun. Her bir bölgeye uygun harfler yazılarak denklem kurulabilir.

Örnek:

Bir sınıfta; futbol veya basketbol oyunlarından sadece birini oynayan 12, en az birini oynayan 18 ve en çok birini oynayan 16 öğrenci vardır. Buna göre sınıfın mevcudu kaçtır?

Çözüm:

Örnek:

Almanca, İngilizce ve Fransızca dillerinden en az birini bilenlerin oluşturduğu bir toplulukta; Almanca bilenlerin sayısı 10, İngilizce bilenlerin sayısı 15, Fransızca bilenlerin sayısı 10, Almanca ve İngilizce bilenlerin sayısı 5, İngilizce ve Fransızca bilenlerin sayısı 7, Fransızca ve Almanca bilenlerin sayısı 4, Üç dili de bilenlerin sayısı 3 tür. Buna göre bu toplulukta kaç kişi vardır?

Çözüm:

Sıralı İkili

Herhangi iki nesne belli bir öncelik sırasına göre bir eleman gibi düşünülürse bu elemana sıralı ikili veya ikili denir.

Birinci bileşeni x , ikinci bileşeni y olan sıralı ikili (x, y) şeklinde yazılır.

İkili de sıra önemli olduğu için $(x, y) \neq (y, x)$ dir.

NOT:

$(x, y) = (a, b)$ ise $x = a$ ve $y = b$ dir.

Örnek:

$(x, 4) = (5, y)$ ise $x + y$ kaçtır?

İki Kümenin Kartezyen Çarpımı

A ve B boş olmayan iki küme olmak üzere birinci bileşen A dan, ikinci bileşen B den alınarak elde edilen tüm sıralı ikililerden oluşan kümeye A ile B kümelerinin **kartezyen çarpımı** denir ve $A \times B$ biçiminde gösterilir.

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A \text{ ve } y \in B\}$$

Örnek:

$A = \{1, 2\}$ ve $B = \{3, 5\}$ ise $A \times B$ kümesini bulunuz.

Uyarı:

$$A \times B \neq B \times A$$

Kartezyen Çarpım İşleminin Özellikleri

1. $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$
2. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
3. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$